Title	Lobachevsky空間のDiscrete Groupについて : Vinbergの一連の論文の紹介 (I) (リー環,代数群とその周辺)
Author(s)	植野, 義明
Citation	数理解析研究所講究録 (1980), 394: 117-126
Issue Date	1980-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/104989
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
394巻 1980年 117-126

Lobachevsky空間のdiscrete groupについて
— Vinbergの一連の論文の紹介(I) —

東大理学部 植野義明

§1. Introduction

よく知られているように、ユークリッド空間E^nにおける鏡映で生成されたdiscrete groupは、非負対称行列$A=(a_{ij})$ 但し、$a_{ii}=1$, $a_{ij}=-\cos \pi/m_{ij}$ $(i \neq j)$, $m_{ij}=2,3,\cdots,\infty$, によって特徴付けることができる。この条件を充す行列はCoxeter[1]で完全に数え上げられている。

そこで次に、定曲率の単連結空間、すなわち、ユークリッド空間E^n, 球面S^n, およびLobachevsky空間Λ^nにおける鏡映で生成される群を考えるのは自然である。まず、Vinbergは次の事実に着目する:

定曲率の単連結空間X^nはすべてベクトル空間V^{n+1}の中に超曲面として"埋め込む"、すなわち、X^nの運動がすべてV^{n+1}の中の線型変換としてV^{n+1}へ拡張されるという状況におくことができる。座標を適当にとると、その超曲面を記述する方

程式は

S^n については　　$x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2=1$

E^n については　　$x_0=1$

Λ^n については　　$x_0^2-x_1^2-\cdots-x_n^2=1,\ x_0>0$

となる。この埋め込みの下では，X^n の k 次元平面とは，V^{n+1} の $(k+1)$ 次元部分空間と X^n との交わりに他ならず，超平面 H を境界とする X^n の半空間は自然に超平面 U を境界とする V^{n+1} の半空間に対応する。

さて，P を X^n の凸多面体，すなわち，X^n の有限個の半空間の共通部分とすると，P に対応して V^{n+1} の中の多面錐 K が定まる（対応する V^{n+1} の半空間の共通部分として定義する）。そして，凸多面体 P の面に関する鏡映で生成される X^n の discrete な運動群 Γ に対し，Γ の作用を V^{n+1} まで延長することによって，K の面に関する鏡映によって生成される線型群を得る。実は，この群は次に定義する"線型 Coxeter 群"になることが分る（定理 1）。かくして我々は，線型 Coxeter 群を特徴づけるものは何かと尋ねる道へ導かれる。

以下，本稿では Vinberg [6] に沿って Lobachevsky 空間における discrete reflection group の理論の解説を試みる。

§2、線型 Coxeter 群の構造

<u>定義</u> V は $\mathbb{R}$ 上の n 次元ベクトル空間とする。線型写像 $R : V \longrightarrow V$ が reflection であるとは，$h \in V$ と $\alpha \in V^*$ であって $\alpha(h) = 2$ なるものによって，$Rv = v - \alpha(v)h$ と書かれること。

$\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in V^*$ に対し，凸多面錐 K は

$$K = \{x \in V \mid \alpha_i(x) \geqq 0,\ i = 1, \cdots, m\}$$ （無駄のない表示）

と書かれているとする。各 α_i に対し，$\alpha_i(h_i) = 2$ を充す $h_i \in V$ をとって，R_i を $R_i v = v - \alpha_i(v) h_i$ で定義する。（凸多面錐の面に関する鏡映）

$$\Gamma := \langle R_i \mid i = 1, \cdots, m \rangle \subset GL(V)$$

とおく。

<u>定義</u> Γ が線型 Coxeter 群であるとは，K, Γ が条件

$$\Gamma \ni \gamma \neq 1 \Rightarrow \gamma \mathring{K} \cap \mathring{K} = \emptyset$$

を充すこと，但し $\mathring{K} = K$ の interior。このとき，K を Γ の基本部屋という。(Γ, K) が線型 Coxeter 群であるともいう。

さて，Γ を上述のような線型 Coxeter 群とする。$I_m := \{1, 2, \cdots, m\}$ の部分集合 S に対し，

$$K(S) := \{x \in V \mid \alpha_i(x) \geqq 0 \quad \text{for } i \in S\}$$

とおくと，$K(S)$ は K を含む凸多面錐である。また，K の (closed) face の全体を $\mathfrak{F}K$，それらのうちで $(n-1)$ 次元の face を $K_1, \cdots, K_m$ とする。このとき，$L \in \mathfrak{F}K$ に対し $\sigma(L) = \{i \mid K_i \supset L\}$ によって $\sigma : \mathfrak{F}K \longrightarrow 2^{I_m}$ を定義する。$\Gamma(S) := \langle R_i \mid i \in S \rangle$ と

おく。このとき，明らかに

<u>命題</u>　$S \in \sigma(\mathcal{F}K)$ ならば，$\Gamma(S)$ は $K(S)$ を基本部屋とする線型Coxeter群である。

逆に，次の定理が成立つ（ 2)⇒1) の部分 ）

<u>定理1</u>　Γ：凸多面錐 K の面に関する鏡映 $R_1,\cdots,R_m$ で生成された線型群 $\subset GL(V)$ とする。このとき， 1) ⇔ 2)

1)　(Γ, K) は 線型Coxeter群

2)　隣接する２つの面 K_i と K_j のすべての組に対して，$\Gamma_{ij} = \Gamma(\{i,j\})$ は $K_{ij} = K(\{i,j\})$ を基本部屋とする線型Coxeter群

2)⇒1) の証明は定理２と並行して進められる。この定理によって，とくに２つの生成元をもつ線型Coxeter群を考えることの重要性が分る。ところで，

<u>命題</u>(Criterion)　２面錐 K が，$\Gamma = \langle R_1, R_2 \rangle$ の基本部屋である，すなわち，(Γ, K) が線型Coxeter群

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ① & \alpha_1(h_2),\ \alpha_2(h_1) \text{ は共に負あるいは共に } 0 \\ ② & \alpha_1(h_2)\alpha_2(h_1) \geqq 4 \quad \text{または} \\ & \qquad = 4\cos^2\frac{\pi}{k} \qquad k \in \mathbb{Z},\ k \geqslant 2 \end{cases}$$

この命題の証明では，Γ の作用で無駄なところは考えなくてよいので $n=2$ としてよい。すると簡単な平面幾何によって Γ の作用する様子が３つのtypeに分れることが分るので，感

じをつかむためにそれを表にして示すと：

$\alpha_1(R_2)\alpha_2(R_1)$の値	R_1R_2	R_1R_2の位数	$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma\Gamma$
$4\cos^2\frac{\pi}{k}$	$\frac{\pi}{k}$の回転	k	V
4	unipotent	∞	半空間
4より大	双曲的回転	∞	2面錐

定理2　Γは凸多面錐Kの面に関する鏡映$R_1,\cdots,R_m$で生成された線型Coxeter群とする。Kに含まれる点xに対して，$\Gamma_x := \langle R_i \mid x\in K_i\rangle$とおく。また，$K^f = \{x\in K \mid |\Gamma_x| < \infty\}$とおく。このとき以下が成り立つ：

1) $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma K$ は凸錐

2) Γは$C := (\Gamma K)^\circ$にdiscreteに作用する

3) $C\cap K = K^f$

4) $K^f \longrightarrow C/\Gamma$ (cannonical) は homeo.

5) $K\ni x$ に対し，Γ_xはxのΓ中の stabilizer

6) K_iとK_jが隣接する面であるとき，R_iR_j の位数をn_{ij} ($\leq\infty$) とかけば，$R_i^2 = 1$，$(R_iR_j)^{n_{ij}} = 1$ がΓの基本関係である。すなわち，Γは(抽象) Coxeter群である。

定理1,2の証明には，まず上の基本関係6)をもつ(抽象) Coxeter群$\tilde{\Gamma}$に対して，その"universal space" $\mathfrak{U}$を構成する。そして，$\tilde{\Gamma}$の$\mathfrak{U}$への作用を調べ，一方$\mathfrak{U}$から$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma K$の上への1対1の対応$\psi$が存在することを言うことによって，$K$が$\Gamma$の基

本部屋であること（定理1）と，準同型 $\bar{\Gamma} \to \Gamma$ が同型であること（定理2，6)）が分る。他の主張も $\mathfrak{U}$ と ψ を調べることによって分る。定理1,2の特殊な場合についてすでにTitsが同じ結果を得ているが，Vinbergの証明はTitsの証明に反して抽象Coxeter群に関する代数的な準備には因っていない。

§2. characteristic，Cartan行列

線型Coxeter群 Γ に対して，行列 $A=(a_{ij})$，$a_{ij}=\alpha_i(h_j)$ をそのCartan行列という。定理1及びその直後に掲げた命題により，Γ のCartan行列 A は次の条件(C1)(C2)：

(C1) $i \neq j \Rightarrow a_{ij} \leq 0$; かつ $a_{ij}=0 \Rightarrow a_{ji}=0$

(C2) $a_{ii}=2$; $a_{ij}a_{ji} \geqq 4$ または $4\cos^2 \pi/n_{ij}$, $n_{ij} \in \mathbb{Z}$

（ここで，n_{ij} は定理2，6)における指数と同じものである。）

を充し，かつ逆に勝手な $h_1,\cdots,h_m \in V$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m \in V^*$ に対して同様にdefされる行列 A が(C1)(C2)を充すならば，それらがdefする多面錐の面に関する鏡映で生成される線型群は線型Coxeter群になることが分る。

さて，一般に(C1)を充すindecomposableな行列 A に対して，非負行列論から A は実固有値をもつことが分るから，A の最小の実固有値 a の符号によって，$a>0$ のとき A を(P)型，$a=0$ のとき(Z)型，$a<0$ のとき(N)型と呼ぶことにする。とくに

$\forall a_{ii}=2$ のとき，A が(Z)型であるとは，$2I-A$ の固有値半径$=2$と同値である。

一般に，行列 A に対し，A の行ベクトル $a_1, \cdots, a_m$ の間の1次関係の全体 $\{(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m = 0\}$ を $L_r(A)$ とかく。（r は row の頭文字）$L_r(A)$ の中の凸錐 $L_r^+(A)$ を $L_r^+(A) = L_r(A) \cap (\mathbb{R}^+)^m$ で def する。

A が(C1)を充す行列のとき，A の(P)型の component たちすべての直和を A^+，(Z)型の component たちの直和を A^0，(N)型の component たちの直和を A^-，$A = A^+ \dotplus A^0 \dotplus A^-$ とする。すると明らかに，$L_r^+(A) = L_r^+(A^0)$

$\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in V^* - \{0\}$，$h_1, \cdots, h_m \in V$ に対し，行列 $A = (a_{ij})$ を $a_{ij} = \alpha_i(h_j)$ で定め，$L_r(A)$ の部分空間 L_α を $L_\alpha = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \mid \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_m\alpha_m = 0\}$ によって def する。また，$K := \{x \in V \mid \alpha_i(x) \geqq 0, i = 1, \cdots, m\}$ とおく。

$S \subset I_m = \{1, 2, \cdots, m\}$ に対して，$S^+, S^0, S^- \subset S$ を $A_{S^+} = (A_S)^+$，$A_{S^0} = (A_S)^0$，$A_{S^-} = (A_S)^-$ によって def する。但し $A_S = (a_{ij})_{i,j \in S}$ etc。また，$Z(S) = \{i \in I_m \mid a_{ij} = 0, \forall j \in S\}$ とかく。

<u>命題</u>　上の記号のもとで，A が(C1)を充すならば

$$\overset{\circ}{K} \neq \emptyset \iff L_\alpha \cap L_r^+(A^0) = \{0\}$$

そしてこのとき，$\forall a_{ii} > 0$ ならば，$\alpha_i \geqq 0$ $i = 1, \cdots, m$ は K の

無駄のない表示を与える, i.e. K は m-sided cone である。

<u>定理3</u>　上の記号のもとで, A が (C1) を充し, $\mathring{K} \neq \phi$ とする。このとき, $S \subset I_m$ が次の2つのうち1つを充す:

1) $S^0 \cup S^- \in \sigma(\mathcal{F}K)$

2) $S = S^0$ かつ $Z(S)^0 = \phi$

ならば, $S \in \sigma(\mathcal{F}K)$ である。

条件 1) は $S = S^+$ なら自動的に充されることに注意しておく。

さて, $V \ni h_1, \cdots, h_m$, $V^* \ni \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ が与えられた時, これらの定める invariant として次の4つが考えられる。

1) Cartan行列 $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \alpha_i(h_j)$

2) $L_h = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_m h_m = 0\}$

3) $L_\alpha = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_m \alpha_m = 0\}$

4) "defect"　$d = \dim\left(\mathrm{Ann}\langle\alpha\rangle / \langle h\rangle \cap \mathrm{Ann}\langle\alpha\rangle \right)$

ここに, $\mathrm{Ann}\langle\alpha\rangle = \{x \in V \mid \alpha_i(x) = 0, \ i = 1, \cdots, m\}$

1)〜4) の組を, 系 h_j, α_i の characteristic という。$L_\alpha \subset L_r(A)$, $L_h \subset L_c(A) =$ "A の列ベクトルの間の線型関係の全体" (c は column の頭文字)。$d_h = \mathrm{codim}_{L_c(A)} L_h$, $d_\alpha = \mathrm{codim}_{L_r(A)} L_\alpha$ とおく。

<u>命題</u>　$m \times m$ 行列 A, $L_c(A)$ の部分空間 L_h, $L_r(A)$ の部分空間 L_α, $d \in \mathbb{Z}$, $d \geq 0$ を任意に与えた時, $\{A, L_h, L_\alpha, d\}$ を characteristic にもつような系 $\{h_i \in V, \alpha_i \in V^*, i = 1, \cdots, m\}$ が

同型を除いてuniqueに存在する。しかも，$\dim V = \operatorname{rank} A + d_\beta + d_\alpha + d$

証明には，$V = \mathbb{R}^{\operatorname{rank} A} \dotplus (L_c(A)/L_\beta) \dotplus (L_r(A)/L_\alpha)^* \dotplus \mathbb{R}^d$ とおけばよい。

<u>定義</u>　$A \sim B \Leftrightarrow \exists D$：対角行列，対角成分 > 0；$A = DBD^{-1}$

<u>定義</u>　$i_1, \cdots, i_k$ が相異る文字 $\in I_m$ のとき，$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_k i_1}$ を A の cyclic product という。

<u>命題</u>　A, B が (C1) を充す行列ならば，$A \sim B \Leftrightarrow$ すべての cyclic product が一致する。

<u>定理4</u>　A：(C1)(C2)を充す行列，$L_\beta \subset L_c(A)$，$L_\alpha \subset L_r(A)$，$d \in \mathbb{Z}$，$d \geqq 0$ が任意に与えられていて，$L_\alpha \cap L_r^+(A^0) = 0$ をみたすとする。このとき，$\{A, L_\beta, L_\alpha, d\}$ を characteristic にもつ線型 Coxeter 群 Γ が同型（線型群としての作用をこめた意味）を除き unique に存在する。

この定理は与えられた Coxeter 群の線型 Coxeter 群としての表現をすべて求める方法を示す。Corollary として，任意の Coxeter 群はある線型 Coxeter 群と同型である。実際，index $\{\operatorname{Cos}\Gamma, L_c(\operatorname{Cos}\Gamma), 0, 0\}$ を characteristic に持つ線型 Coxeter 群を上の定理により作ればよい。但し，ここに $\operatorname{Cos}\Gamma = (a_{ij})$，$a_{ij} = -2\cos \pi/n_{ij}$ $(n_{ij} \neq \infty)$；$a_{ij} = -2$ $(n_{ij} = \infty)$。

上の構成は Coxeter により注意され，Tits が実際に線型 Coxeter群であることを証明した"標準的表現"といわれるものであるが，ここにおいては，$d = d_{\mathfrak{h}} = 0$ となっており表現に無駄がない。一般に $d = d_{\mathfrak{h}} = 0$ の時，Γ は reduced であると言う。これは，K が strictly convex といってもよいし，或いは $\langle\alpha\rangle = V^*$ といっても同値である。とくに，このとき $\dim V = \operatorname{rank} A + d_\alpha$，$\dim\langle\mathfrak{h}\rangle = \operatorname{rank} A$ となる。また，任意の線型 Coxeter群 $\Gamma \subset GL(V)$ に対して，Γ の作用を $V^{red} = V/\operatorname{Ann}\langle\alpha\rangle$ へおとせば，reduced な線型 Coxeter群 Γ^{red} を得る。

最後に，山口氏の報告中で必要な定義を追加しておく：

<u>定義</u>　$S \subset I_m$ が A を reduce する $\Leftrightarrow$ $i \notin S, j \in S$ ならば，$a_{ij} = 0$

<u>命題</u>　$W \subset V$（部分空間）が Γ - 不変である

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists S \subset I_m \ ; \ S \text{ は } A \text{ を reduce する} \\ \text{s.t. } \langle\mathfrak{h}\rangle_S \subset W \subset \operatorname{Ann}\langle\alpha\rangle_{I_m - S} \end{cases}$$

但し，$\langle\mathfrak{h}\rangle_S := \langle\mathfrak{h}_i\rangle_{i \in S}$ etc.

<u>系</u>　群 Γ が irreducible $\Leftrightarrow$ A が indecomposable かつ $d_{\mathfrak{h}} = d = 0$

尚，文献は村上氏の報告の最終頁を参照されたい。